

УДК 532.5

## ЭВОЛЮЦИЯ ДАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА ОБЪЕКТОМ, БУКСИРУЕМЫМ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА И ФРУДА

© 2004 г. Г. Н. Баландина, В. В. Папко, Д. А. Сергеев, Ю. И. Троицкая

*Институт прикладной физики РАН  
603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
E-mail: yuliya@hydro.appl.sci-nnov.ru  
daniil@hydro.appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 22.01.2003 г., после доработки 15.04.2003 г.

Построена упрощенная теоретическая модель турбулентного следа за телом, буксируемым в стратифицированной жидкости при больших числах Рейнольдса и Фруда. Предполагается, что основным механизмом эволюции следа является развитие гидродинамической неустойчивости этого струйного течения. При этом в квазилинейном приближении рассматривается развитие наиболее неустойчивой “изгибной” моды возмущений струйного течения, для описания которой используется простое приближенное решение. В рамках модели показано, что средняя скорость удовлетворяет диффузионному уравнению, коэффициент диффузии которого определяется интегральными параметрами следа, зависящими только от времени, что объясняет гауссову форму профиля скорости в следе. Временная зависимость коэффициента диффузии от времени определяется нарастанием возмущений струйного течения в следе за счет развития гидродинамической неустойчивости. С учетом зависимости коэффициента диффузии от времени найдены зависимости от времени параметров следа: средней скорости, горизонтального масштаба, средней кинетической энергии, средней энтропии и т.д. Для проверки модели выполнен эксперимент по изучению следа за телом, буксируемым в стратифицированной жидкости. Измерения скорости в следе проводились методом PIV (Particle Image Velocimetry). Полученные теоретические зависимости находятся в хорошем согласии с данными, полученными в нашем эксперименте и приведенными в литературе.

### ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные эксперименты по исследованию турбулентных следов за буксируемыми телами в стратифицированной жидкости проводятся с конца 60-х годов (см. обзоры [1, 2]). К настоящему времени подробно исследованы особенности течения как в ближнем ( $Nt \sim 1$ ), так и в дальнем следе ( $Nt > 20$ ), где  $N$  – частота плавучести на горизонте движения тела, а  $t$  – время от его прохода через точку наблюдения. Поле течения в ближнем следе, очевидно, сильно зависит от деталей обтекания тела (прежде всего от его формы). Наиболее подробно оно исследовано для случая сферы, буксируемой с постоянной скоростью, так в [3–5] на основе наблюдений оптическими методами была введена классификация типичных течений по числам Фруда  $Fr = 2U_i/ND$  и Рейнольдса  $Re = U_i D/\nu$ , где  $D$  – диаметр сферы,  $U_i$  – скорость буксировки,  $\nu$  – коэффициент вязкости.

В дальнем следе за телом, буксируемым в стратифицированной жидкости, обнаружено два типа движений: внутренние волны [6–9] и вихревая квазидвумерная мода [10–12]. Общая теория квазидвумерных течений в стратифицированной жидкости развита в [13–15]. Это движения невол-

новой природы, которым во вращающейся стратифицированной жидкости соответствует дисперсионная ветвь инерционно-гравитационных волн. Они имеют большие характерные времена изменчивости по сравнению с внутренними волнами тех же пространственных масштабов.

Для внутренних волн принципиальную роль играют вертикальные смещения частиц в стратифицированной жидкости, поэтому при их измерении используют методы, реагирующие на такие смещения и связанные с ним изменения показателя преломления жидкости, ее температуры и т.п. Для регистрации движений в квазидвумерной вихревой моде используют методы, основанные на измерении горизонтальной скорости жидкости. При этом, наиболее полную картину поля течений в горизонтальной плоскости позволяет получить метод Particle Image Velocity (PIV), основанный на измерении скоростей частиц нейтральной плавучести [16].

Течения в дальнем следе определяются в основном движениями вихревой моды. Такой след за сферой, буксируемой в жидкости, стратифицированной с постоянной частотой плавучести, был изучен в [10–12]. Была исследована временная

эволюция параметров следа при различных числах Фруда и Рейнольдса. В частности, были измерены зависимости средней скорости на оси следа  $U_0(t)$ , полуширины следа  $\delta(t)$ , средней кинетической энергии, средней энтропии  $W(t)$ , средней диссипации кинетической энергии  $S(t)$  и других величин, а позднее в [17–18] была исследована вертикальная структура пульсаций скорости. В работах [10–12] полученные эмпирические зависимости аппроксимировались степенными функциями. Например, в зависимостях  $U_0(t)$  было выделено три временных интервала: 1) трехмерный ближний след, в котором  $U_0(t)$  пропорционально  $t^{-2.3}$ ; 2) переходный след, в котором зависимость  $U_0(t)$  более медленная (по данным [11]  $U_0 \sim t^{-0.25}$ , а по данным [12]  $U_0 \sim t^{-0.38}$ ); 3) дальний след, в котором по данным [11]  $U_0 \sim t^{-0.76}$ , а по данным [12]  $U_0 \sim t^{-0.9}$ .

В последнее время предприняты попытки прямого численного моделирования эволюции следа в стратифицированной жидкости [19], которые дают близкие к экспериментальным степенные зависимости скорости на оси и ширины следа от времени. В то же время, для понимания процессов, происходящих в следе, требуется построение теоретической модели, описывающей его эволюцию. Заметим, что в [18] на основе наблюдений за картиной линий тока в следе высказано предположение о важной роли гидродинамической неустойчивости при его эволюции. В настоящей работе построена упрощенная теоретическая модель эволюции следа за буксируемым телом на интервалах 2 (переходный след) и 3 (дальний след), обусловленной развитием гидродинамической неустойчивости квазидвумерного струйного течения в следе. Кроме того, в связи с тем, что данных, представленных в работах [10–12], недостаточно для проверки предлагаемой модели, были проведены дополнительные эксперименты по исследованию следа за телом PIV методом. Развита модель позволяет в основном объяснить полученные в [10–12] и полученные нами экспериментальные зависимости.

### 1. КАЧЕСТВЕННАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Опишем подробнее качественную картину эволюции следа в стратифицированной жидкости, на основе которой будет построена количественная модель. Экспериментально установлено [4, 5], что при больших числах Рейнольдса и Фруда эволюция следа за телом, буксируемым в стратифицированной жидкости, близка к поведению трехмерного турбулентного следа в однородной жидкости. Как показывают эксперименты [10–12], и в однородной, и в стратифицированной жидкости

средняя скорость в следе приблизительно представляет собой гауссову функцию

$$U(x, y, z) = U_0(x) e^{-\frac{y^2 + z^2}{\delta^2(x)}}.$$

При этом, как показано в [11] в системе отсчета, движущейся вместе с телом,

$$\frac{U_0(x)}{U_t} = 0.6 \left( \frac{x}{D} \right)^{-2/3}, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\delta(x)}{D} = C_0 \left( \frac{x}{D} \right)^{1/3}, \quad (1.1б)$$

где  $x$  – расстояние от тела в продольном направлении. В системе отсчета, в которой жидкость на бесконечности покоится (лабораторной системе отсчета),  $U_0$  и  $\delta$  зависят от  $t$  (времени, прошедшем от момента прохода тела) которое связано с  $x$  выражением  $x = Ut$ . Такие автомодельные законы следуют из анализа, основанного на рассмотрении баланса импульса в следе [20].

На больших расстояниях от тела существенным становится влияние стратификации: возникают внутренние волны (ВВ), генерируемые в основном спиральной модой ближнего следа [6–9], изменяется закон эволюции [10–12]. Можно предположить, что параметром, определяющим переход к этому режиму, является градиентное число Ричардсона  $Ri = N^2/U_z^2$ . Действительно, хорошо известно, что стратификация оказывает на сдвиговое течение, стабилизирующее действие. При этом достаточное условие устойчивости стратифицированного сдвигового потока по отношению к малым возмущениям в вертикальном направлении определяется критерием Майлса – Ховарда [21]  $Ri > 1/4$ . Исходя из этого, предположим, что возрастание размеров следа в вертикальном направлении за счет турбулентного вовлечения прекращается, когда  $Ri$  становится больше некоторой величины  $Ri_0 \sim 1$ . Этот момент времени  $t_0$  (или расстояние до тела  $x_0$ ) примем условно за начало “квазидвумерного” этапа эволюции следа. Для него справедливы следующие оценки. Число Ричардсона в следе можно оценить как  $Ri \sim N^2 \delta^2(x)/U_0^2(x)$ . Используя (1.1a), (1.1б), легко видеть, что условие  $Ri > 1$  выполняется при  $x > x_0 = U_t/N$ . Расстоянию  $x_0$  в лабораторной системе отсчета соответствует время  $t_0 = 1/N$ . При этом характерная толщина следа в вертикальном направлении

$$\delta_z = \delta(x_0) = DC_0(\text{Fr})^{1/3}, \quad (1.2a)$$

а средняя скорость на оси следа

$$U_0(x_0) = U_t C_1(\text{Fr})^{-2/3}. \quad (1.2б)$$

Следует заметить, что трехмерный турбулентный след имеет одинаковые масштабы в вертикальном  $\delta_z$  и поперечном  $\delta$  горизонтальном направлениях, поэтому оценка  $\delta(x_0)$  относится к обоим этим масштабам. Однако при  $Ri$  порядка единицы след может стать анизотропным, поскольку в горизонтальном направлении, в отличие от вертикального, он продолжает расширяться. Кроме того, при больших числах Фруда происходит перемешивание жидкости в следе и последующий его коллапс. При этом оценка (2.2а) будет относиться к вертикальному масштабу следа и можно ожидать, что поперечный горизонтальный масштаб будет в несколько раз больше, т.е.  $\delta = \alpha \delta_z$ , где  $\alpha > 1$ . При  $x$  существенно большем  $x_0$  число Ричардсона в сдвиговом течении становится много больше единицы, и тогда след ведет себя как квазидвумерный, поскольку вертикальная скорость в нем мала по сравнению с горизонтальной (см. [17–18]). В этом течении могут существовать внутренние волны и медленные квазидвумерные движения (вихревая мода).

Для построения теоретической модели эволюции следа необходимы упрощающие предположения. В рамках настоящей модели будем пренебрегать влиянием ВВ на течение в следе. Это можно качественно обосновать следующим образом. Мы хотим построить модель, объясняющую убывание скорости в следе, иными словами, нас интересует вопрос передачи импульса от следа к возмущениям<sup>1</sup>. При  $Ri > 1/4$  течение устойчиво по отношению к возмущениям типа ВВ, т.е. ВВ не могут возбуждаться на таком течении за счет неустойчивости, отбирая у течения импульс. В то же время, струйное течение в следе неустойчиво по отношению к квазидвумерным возмущениям. Они могут отбирать импульс у среднего течения, приводя к уменьшению скорости в струе. Исходя из этого, выдвинем гипотезу о том, что эволюцию дальнего следа можно объяснить развитием гидродинамической неустойчивости квазидвумерного течения по отношению к квазидвумерным возмущениям. Ниже построена количественная модель, основанная на этой гипотезе, и приведено сопоставление ее выводов с данными экспериментов.

## 2. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ДВУМЕРНОГО СЛЕДА

**2.1. Система уравнений.** Целью теоретической части этой работы является построение модели эволюции следа, упрощенной настолько, что не требовалось бы численное моделирование. Первое упрощение касалось того, что мы пренебрегаем внутренними волнами и рассматриваем квази-

двумерную моду. Дальнейшие упрощения делаются в рамках двумерной модели: это квазилинейное и ВКБ приближения.

В работах [14–15] было показано, что при больших числах Ричардсона в стратифицированной жидкости существует мода квазигоризонтальных медленных движений неволевой природы (вихревая мода), поле горизонтальной скорости, в которой  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u, v)$  удовлетворяет системе уравнений квазидвумерной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \left( \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right), \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.1б)$$

Здесь операторы  $\nabla$ ,  $\Delta$ ,  $\operatorname{div}$  двумерные, они вычисляются по горизонтальным координатам  $(x, y)$ .

Рассмотрим простое обобщение системы (2.1а), (2.1б), позволяющее учесть турбулентный перенос импульса. Поле скорости представим в виде суммы средних компонент  $\langle \mathbf{u} \rangle$  и мелкомасштабных турбулентных флуктуаций  $\mathbf{u}'$ , считая, что среднее поле двумерно, а его мелкомасштабная компонента имеет три компоненты. Усредняя горизонтальную проекцию уравнений гидродинамики по турбулентным флуктуациям, получим:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i \mathbf{u}' \rangle =$$

$$= \nu \left( \Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\partial^2 \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial z^2} \right), \quad (2.1'a)$$

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (2.1'б)$$

В системе (2.1'a), (2.1'б)  $\langle \mathbf{u} \rangle$  – двумерный вектор, а суммирование производится по трем повторяющимся индексам  $i = 1, 2, 3$ .

Для замыкания уравнения (2.1'a) воспользуемся простейшей градиентной гипотезой:

$$\langle u'_i u'_j \rangle = K_T \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad \text{при } i, j = 1, 2, \quad (2.2a)$$

$$\langle u'_i u'_3 \rangle = K_{Tz} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial z}. \quad (2.2б)$$

Здесь  $K_T$  и  $K_{Tz}$  – горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной вязкости. Можно оценить  $K_T \sim \delta u'$ , где  $K_{Tz} \sim \delta_z w$ , где  $\delta$  и  $\delta_z$  – горизонтальный и вертикальный масштабы следа, а  $u'$  и  $w'$  – масштабы пульсаций скорости. При этом очевидно  $K_{Tz} \ll K_T$ .

Дальнейшее решение задачи удобно проводить в переменных завихренности  $(\omega)$  – функция тока  $(\psi)$ , где  $\psi$  вводится по формулам:

$$\langle u \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \langle v \rangle = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> Интегральный импульс струи не меняется, но плотность импульса меняется, перераспределяясь между средним течением и возмущением.

Тогда система уравнений движения примет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi \partial \omega}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \Psi \partial \omega}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) K_T \omega +$$

$$+ 2 \left( 2 \frac{\partial^2 K_T \partial^2 \Psi}{\partial x \partial y \partial x \partial y} - \frac{\partial^2 K_T \partial^2 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^2 K_T \partial^2 \Psi}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{Tz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right), \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \omega. \quad (2.4б)$$

Таким образом, на временах  $t > t_0 = 1/N$  течение жидкости в следе можно описывать системой (2.4a), (2.4б). Поскольку след представляет собой турбулизованную область, вытянутую вдоль оси  $x$ , и расширяется достаточно медленно (не быстрее, чем  $x^{1/2}$ ), то на достаточно больших расстояниях от тела (или больших временах от момента прохода) можно пренебрегать зависимостью средней скорости от продольной координаты и считать, что она зависит только от  $y, z$  и  $t$ . Как показывают эксперименты [17–18], толщина следа по вертикали зависит от времени достаточно слабо, а пульсации вертикальной скорости малы по сравнению с горизонтальными и быстро убывают во времени. Приведенные выше оценки коэффициентов турбулентной вязкости  $K_T$  и  $K_{Tz}$  тогда показывают, что вертикальный турбулентный перенос со временем ослабевает. На основании этого мы им будем пренебрегать по сравнению с горизонтальным переносом, тогда зависимость от  $z$  является параметрической<sup>2</sup>. Будем считать, что горизонтальный коэффициент турбулентной вязкости не зависит от продольной координаты.

**2.2. Квазилинейное приближение.** Итак, след представляет собой квазидвумерный турбулизованный сдвиговый поток. На таком потоке из-за сдвиговой неустойчивости могут нарастать квазидвумерные возмущения, имеющие более низкие характерные частоты, чем трехмерные возмущения в ближнем следе. Для описания этого процесса будем искать решение системы (2.4a), (2.4б) в виде суммы среднего течения, не зависящего от продольной координаты  $x$  и его возмущений, которые представим в виде суперпозиции неоднородных гармонических волн:

$$\psi(x, y, t) = \Psi_0(y, t) + \Psi_1(x, y, t), \quad (2.5a)$$

<sup>2</sup> Действительно, если нет обмена импульсом между слоями жидкости в вертикальном направлении, то эволюция течения в каждом слое происходит независимо, поэтому зависимость от  $z$  полей скорости не влияет на результат. Здесь в рамках грубой модели такая зависимость не учитывается, поскольку устойчивая стратификация действительно ослабляет обмен импульсом между слоями. Вместе с тем, этот вопрос требует дальнейшего исследования.

$$\omega(x, y, t) = \omega_0(y, t) + \omega_1(x, y, t),$$

$$\Psi_1 = \operatorname{Re} \sum_k a(k, t) \psi_1(y, t, k) e^{ikx + i\phi_k}, \quad (2.5б)$$

$$\omega_1 = \operatorname{Re} \sum_k a(k, t) \Omega_1(y, t, k) e^{ikx + i\phi_k}.$$

Здесь  $k$  – волновое число  $k$ -й гармоники возмущения. Примем гипотезу случайных фаз возмущений, т.е. будем считать фазу  $\phi_k$  случайной функцией  $k$ . Тогда статистическое усреднение приведет к системе уравнений квазилинейного приближения, аналогичного тому, которое используется в физике плазмы [22]. Применимость этого приближения обоснуется ниже.

Уравнения для средних полей можно получить осреднением системы (2.4a), (2.4б) по  $x$ , которое в этом случае эквивалентно статистическому осреднению. С учетом разложения возмущений функции тока и завихренности в ряды Фурье и связи комплексных амплитуд функции тока и завихренности после стандартных преобразований можно привести уравнение для  $\omega_0$  к виду:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{2} \sum_k k |a(k, t)|^2 \operatorname{Im} \left( \psi_1^*(y, t, k) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (K_T \omega_0).$$

Здесь символ \* означает комплексное сопряжение.

Отсюда легко получить уравнение для средней скорости  $U = \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \sum_k k |a(k, t)|^2 \operatorname{Im} \left( \psi_1^*(y, t, k) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left( K_T \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (2.6)$$

$\psi_1(y, t, k)$  и  $\Omega_1(y, t, k)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Omega_1 a) + ik \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \Omega_1 a - \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \psi_1 a \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) K_T \Omega_1 a -$$

$$- 2a \psi_1 k^2 K^{Tyy} = \sum_k iq \left( \frac{\partial \psi_1(y, t, k-q)}{\partial y} \Omega_1(y, t, k) - \right. \quad (2.7)$$

$$\left. - \frac{\partial \Omega_1(y, t, k-q)}{\partial y} \psi_1(y, t, k) \right) \cdot a(k-q, t) a(q, t) e^{-i(\phi_k - \phi_q + \phi_q)};$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - k^2 \psi_1 = \Omega_1. \quad (2.8)$$

В приближении случайных фаз после осреднения правая часть оказывается равной нулю, т. е. комплексные амплитуды возмущений удовлетворяют линейным уравнениям. В действительности за счет генерации гармоник происходит синхронизация фаз, при этом вынужденные гармоники дают вклад в правую часть уравнения (2.7) для возмущений, т.е. оно становится нелинейным. Однако, как показывает ряд численных и асимптотических исследований [23–25], основным нелинейным эффектом при развитии неустойчивости сдвиговых потоков является возникновение среднего течения, а не генерация гармоник. Это приводит к тому, что квазилинейное приближение фактически можно использовать, когда формальные критерии его применимости нарушаются. Для определения условий применимости квазилинейного приближения за формальными рамками требуется решение полной нелинейной задачи, однако в настоящей работе, эта оценка основана на сравнении с экспериментом и проверке закона сохранения энергии, что косвенно указывает на применимость квазилинейного приближения.

**2.3. ВКБ приближение для возмущений.** Итак, в дальнейшем воспользуемся при описании возмущений уравнением (2.7) с нулевой правой частью. Допустим, что возмущения с характерным временным масштабом  $T_{dis}$  являются существенно более быстрыми функциями времени, чем среднее течение с характерным временным масштабом  $T_{avr}$ , т.е.  $\mu = T_{dis}/T_{avr} \ll 1$ . Справедливость этого предположения также будет обсуждаться ниже. В этом случае систему (2.7), (2.8) можно решать методом ВКБ. Приведем эту систему к одному уравнению, принимая во внимание, что  $\Psi_{0y} = U$ , а  $\omega_{0y} = U_{yy}$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - k^2 \psi_1 \right) a \right) + ika \left( U \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - k^2 \psi_1 \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \psi_1 \right) = \\ = a \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) K_T \left( \frac{\partial^2 \psi_T}{\partial y^2} - k^2 \psi_1 \right) + 2a \psi_1 k^2 K^{Tyy}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты уравнения (2.9), а также  $a(k, t)$  являются функциями медленного времени  $\tau = \mu t$ . Будем искать его решение в виде:

$$\psi_1 = (\Phi_0 + \mu \Phi_1 + \dots) e^{-i \frac{\Theta}{\mu}}. \quad (2.10)$$

Обозначим  $\omega = \frac{d\Theta}{d\tau}$ , тогда  $\omega = \mu \int_0^t \omega dt$ .

В порядке  $\mu^0$  получим уравнение для  $\Phi_0$ :

$$\begin{aligned} ik \left( \left( \frac{\omega}{k} - U \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \Phi_0 \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Phi_0 \right) + \\ + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) K_T \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \Phi_0 \right) + 2\Phi_0 k^2 K^{Tyy} = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\Phi_0|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (2.12)$$

Решение граничной задачи (2.11–2.12) на собственные функции и собственные числа дает дисперсионное соотношение  $\omega = \omega(k, \tau)$  и форму моды возмущения. Очевидно, что при  $K_T \rightarrow 0$  уравнение (2.11) переходит в уравнение Эйлера.

Условие разрешимости уравнения порядка  $\mu^1$  дает уравнение, описывающее зависимость амплитуды  $a$  от времени:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \frac{\partial}{\partial t} \left( a \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \Phi_0 \right) \right) dy = 0. \quad (2.13)$$

Здесь  $\Psi(y, t)$  – решение уравнения, сопряженного с уравнением 0-го порядка (2.11). С учетом (2.10) уравнение (2.6) для  $U$  можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \sum_k k |a(k, t)|^2 e^{\int_0^t \text{Im} \omega dt} \times \\ \times \text{Im} \left( \Phi_0(y, t, k) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( K_T \frac{\partial U}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Итак, мы получили замкнутую систему уравнений квазилинейного приближения, включающую в себя: 1) уравнение (2.14) для средней скорости, зависящее от амплитуды возмущений  $a(k, t)$ , комплексной амплитуды функции тока  $\Phi_0$  и мнимой части частоты  $\text{Im} \omega$ ; 2) граничную задачу (2.11–2.12) для определения функции  $\Phi_0$  и собственной частоты  $\omega$ , которые зависят от  $U$ , входящего в коэффициенты уравнения (2.11); 3) уравнение для амплитуды (2.13).

### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Как показывают результаты многочисленных экспериментов (см. например [10–12]) и, как будет видно из дальнейшего, следует из настоящей модели, средняя скорость в следе имеет гауссов профиль:

$$U = U_0(t) e^{-y^2/\delta^2(t)}. \quad (3.1)$$

Заметим, что если проинтегрировать уравнение (2.6) по  $y$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , то с учетом убывания возмущений на бесконечности легко видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} U dy = \text{const.}$$

Отсюда следует:

$$U_0(t)\delta(t) = U_0(0)\delta(0) = U_{00}\delta_0. \quad (3.2)$$

Введем безразмерную функцию  $\theta = U_0(t)/U_{00} = \delta_0/\delta(t)$ .

Перейдем в уравнении (2.11) к безразмерным переменным:

$$\eta = \frac{y\theta(t)}{\delta_0}; \quad V = \frac{U}{U_{00}\theta(t)}; \quad C = \frac{\omega}{kU_{00}\theta(t)};$$

$$\phi_0 = \frac{\Phi_0}{U_{00}\theta(t)}; \quad K = k\frac{\delta_0}{\theta(t)}.$$

Тогда оно примет вид:

$$(C - V) \left( \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \eta^2} - K^2 \phi_0 \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \phi_0 + \frac{1}{iK\text{Re}_T} \times \quad (3.3)$$

$$\times \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - K^2 \right) \frac{K_T}{K_{T0}} \left( \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \eta^2} - K^2 \phi_0 \right) + 2\phi_0 K^2 \frac{K_{\eta\eta T}}{K_{T0}} \right] = 0,$$

$$\phi_0|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\text{Re}_T = U_{00}\delta_0/K_{T0}$ ,  $K_{T0}$  – начальное значение коэффициента турбулентной вязкости. Как показывают эксперименты (например, [17]), на струе нарастает изгибная мода, т.е. такой тип колебаний, в котором  $\phi_0$  – четная функция  $\eta$ .

На рис. 1 представлены зависимости действительной и мнимой части безразмерной фазовой скорости  $C$  и безразмерного инкремента  $\beta = K\text{Im}C$  от безразмерного волнового числа  $K$  для такой моды при различных числах Рейнольдса  $\text{Re}_T$ . Коэффициент турбулентной вязкости предполагался постоянным и равным  $K_{T0}$ . Видно, что при  $\text{Re}_T > 100$  дисперсионные кривые очень близки и стремятся к кривой, соответствующей  $\text{Re}_T = \infty$ . Эта кривая изображает решение уравнения Релея, которое получается из (2.3) при нулевом коэффициенте вязкости. Видно, что при этом  $\beta$  имеет максимум при  $K \approx 0.94$ . В дальнейшем мы будем считать, что число Рейнольдса достаточно велико, так как что можно использовать решение уравнения Релея. Также, из рис. 1в видно, что величина  $\beta$  хорошо аппроксимируется полиномом

$$\beta = 0.423K - 0.221K^2. \quad (3.5)$$

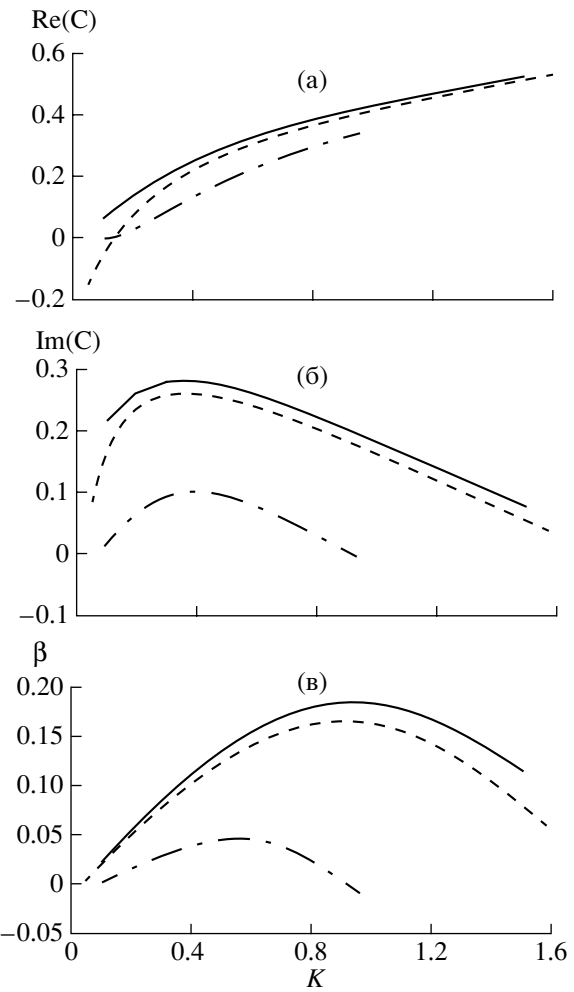


Рис. 1. Зависимости от безразмерного волнового числа действительной и мнимой частей скорости и инкремента возмущений на плоской струе с гауссовым профилем. Сплошные линии –  $\text{Re}_T = 1000$ , штриховые –  $\text{Re}_T = 100$ , штрихпунктирные –  $\text{Re}_T = 10$

При этом размерный инкремент выражается через  $\beta$  следующим образом:

$$\text{Im} \omega = \frac{U_{00}}{\delta_0} \theta^2 \beta.$$

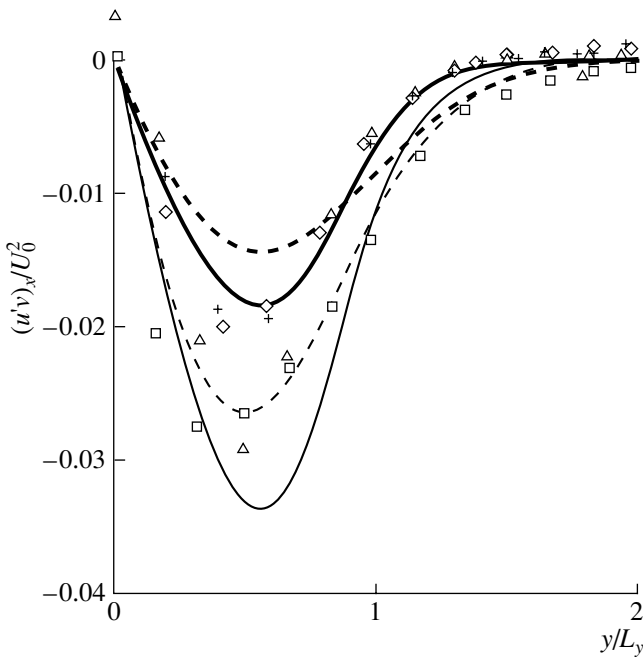
Известно, что при  $K \ll 1$  четное решение уравнения Релея на расстоянии от оси меньшем  $1/k$  можно записать в виде:

$$\phi_0 = V(\eta) - C. \quad (3.6)$$

В таком решении, величина, пропорциональная волновому потоку импульса

$$\text{Im} \left( \phi_0^* \frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} \right) = \text{Im} C \frac{\partial V}{\partial \eta}. \quad (3.7)$$

На рис. 2 представлены профили потоков импульса – приближенного, вычисленного по формуле (3.7) и точного, определенного по решению



**Рис. 2.** Профили поперечного потока продольной компоненты импульса. Сплошные кривые соответствуют точному решению уравнения (3.3), пунктирные – приближенному решению (3.7). Отношение амплитудных коэффициентов для толстых и тонких кривых 0.3 к 0.55. Экспериментальные точки взяты из [17], символам {+,  $\diamond$ ,  $\Delta$ ,  $\square$ } соответствуют  $x/D = \{17, 22, 30, 38\}$ .  $L_y = \delta \sqrt{\ln 5}$ .

уравнения (3.3) при  $K \approx 0.94$ . Нормировка функций  $\phi$  выбиралась в соответствии с данными экспериментов [18]. Видно, что форма профилей потоков импульса как точного, так и приближенного, согласуется с данными измерений. Исходя из этого, выражение для потока импульса будем аппроксимировать формулой (3.7). В случае пренебрежения вязкостью упрощается (2.13) и условие разрешимости принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_0}{U-c} \frac{\partial}{\partial t} \left( a \frac{U_{yy} \Phi_0}{U-c} \right) dy = 0. \tag{3.8}$$

Из (3.8) можно получить уравнение для амплитуды  $a$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\delta^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{a}{\delta^3} \frac{\dot{\delta}}{\delta} H = 0, \tag{3.9}$$

где  $H = 1 + \frac{K \frac{dF}{dK} - G}{F}$ ,  $F = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\phi_0}{V-C} \right)^2 V_{\eta\eta} d\eta$ ,  $G = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\phi_0}{V-C} \right)^2 \eta V_{\eta\eta} d\eta$ .

Для гауссовой формы профиля скорости в следе зависимость действительной и мнимой частей функции  $H(K)$  при  $K > 0.25$  хорошо аппроксимируется полиномами

$$\text{Re}H(K) = 5.15 - 1.41K - 0.649K^2,$$

$$\text{Im}H(K) = 4.4 - 7.46K + 9.66K^2 - 3.36K^3.$$

Тогда можно легко найти решение уравнения (3.9), из которого следует, что модуль комплексной функции  $a(k, t)$  равен:

$$\left| \frac{a(k, t)}{a_0} \right| = (\theta)^{-0.43} \exp \left( 0.705k\delta_0 \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) + 0.16k^2\delta_0^2 \left( \frac{1}{\theta^2} - 1 \right) \right), \tag{3.10}$$

а комплексную амплитуду  $k$ -й гармоники возмущения функции тока можно представить в виде:

$$\Psi_1 = A(k, t) U_{00} \theta(t) (V - C), \tag{3.11}$$

где  $A(k, t) = a(k, t) \exp \left\{ \frac{U_{00}}{\delta_0} \int_0^t \beta \theta^2 dt \right\}$ .

#### 4. УПРОЩЕННАЯ КВАЗИЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

**4.1. Уравнения для  $U_0(t)$  и  $\delta(t)$ .** Преобразуем уравнение (2.14) с учетом выражения (3.7) для безразмерного потока импульса. Размерный поток импульса в  $k$ -й гармонике равен:

$$\frac{1}{2} \text{Im} \omega |a(k, t)|^2 \frac{\partial U}{\partial y} \exp \left\{ 2 \int_0^t \text{Im} \omega dt_1 \right\}. \tag{4.1}$$

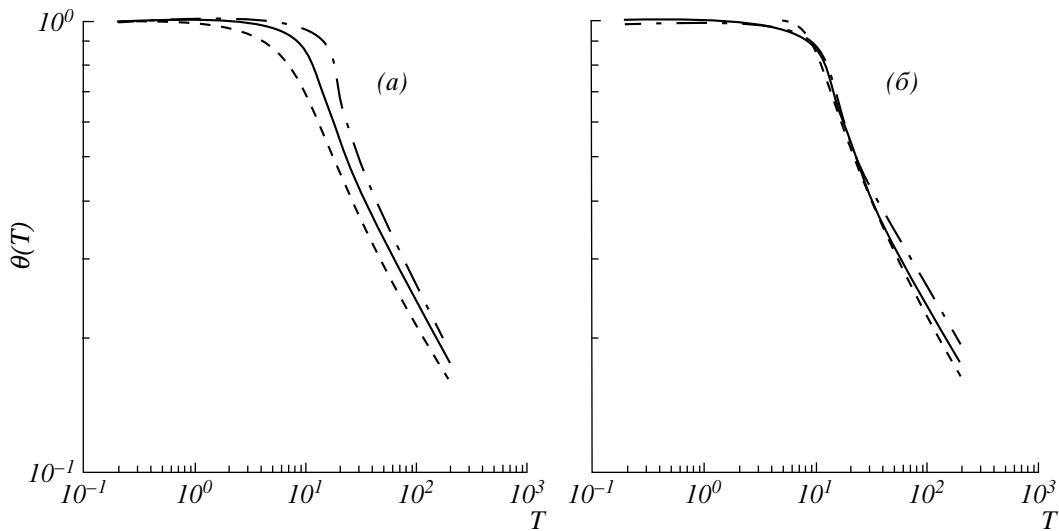
С учетом (4.1) (2.14) примет вид диффузионного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} K_T(y, t) \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{4.2}$$

с зависящим от времени коэффициентом диффузии:

$$D(t) = \frac{1}{2} \frac{U_{00}}{\delta_0} \sum_k \theta^2(t) \beta |a(k, t)|^2 \exp \left\{ \frac{U_{00}}{\delta_0} \int_0^t \beta \theta^2(t_1) dt_1 \right\}.$$

Если число Рейнольдса велико, то второе слагаемое в правой части (4.2) мало, и мы им будем пренебрегать. В этом случае решением уравнения будет гауссова функция (3.1), что согласуется с данными многочисленных экспериментов (например, [10–12]). При этом зависимость  $U_0$  и  $\delta$  от времени определяется зависимостью от времени коэффициента диффузии в уравнении (4.2), который, в свою очередь, зависит от интегральных характеристик следа  $U_0(t)$  или  $\delta(t)$ , которые выра-



**Рис. 3.** Зависимости  $\theta(T)$  при  $\epsilon_0^2$  равном 0.001 (штриховая линия), 0.0002 (сплошная линия), 0.00002 (штрих–пунктирная линия): а – несмещенные кривые, б – смещенные кривые  $\theta(T - T_0)$ .  $T_0 = -5$  для  $\epsilon_0^2 = 0.001$ ;  $T_0 = 0$  для  $\epsilon_0^2 = 0.0002$ ;  $T_0 = 6$  для  $\epsilon_0^2 = 0.00002$ .

жаются через функцию времени  $\theta(t)$ . Исходя из этого, можно получить уравнения для  $\theta(t)$ .

Введем безразмерное волновое число, не зависящее от времени  $\kappa = k\delta_0$  и безразмерное время  $T = tU_{00}/\delta_0$ . Тогда принимая во внимание уравнение (3.5) для  $\beta$  и (3.10) для  $|a|$ , легко видеть, что коэффициент диффузии  $D$  выражается через  $\theta$  следующим образом:

$$D(T) = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} |a_0|^2(\kappa) \theta^{1.14} \times \exp(\sigma) \left( 0.423 \frac{\kappa}{\theta} - 0.221 \left( \frac{\kappa}{\theta} \right)^2 \right), \quad (4.3)$$

$$\text{где } \sigma = \left\{ 1.41\kappa \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) + 0.32\kappa^2 \left( \frac{1}{\theta^2} - 1 \right) + 0.846\kappa \int_0^T \theta(T_1) dT_1 - 0.442\kappa^2 T \right\}.$$

Введем новое время  $\tau$ , такое, что

$$\frac{d\tau}{dT} = D(T), \quad (4.4)$$

тогда уравнение диффузии примет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Его решение:

$$U = \frac{U_{00}\delta_0}{\sqrt{\delta_0^2 + 4\tau}} e^{-\frac{y^2}{\delta_0^2 + 4\tau}}.$$

Отсюда следует, что  $\theta(T) = U_0(T)/U_{00} = (1 + 4\tau/\delta_0^2)^{-1/2}$ . Выражая  $\tau$  через  $\theta$  и дифференцируя по  $T$  с учетом (4.4) получим дифференциальное уравнение для  $\theta$ :

$$\frac{d}{dT} \frac{1}{\theta^2} = \frac{4}{\delta_0^2} D(T).$$

где  $D(T)$  задается формулой (4.3). Таким образом, получается интегро–дифференциальное уравнение для нахождения  $\theta$ . По определению, начальное условие  $\theta = 1$  при  $T = 0$ . Если ввести переменную  $q = \int_0^T \theta(T_1) dT_1$ , то получится, что  $q$  и  $\theta$  удовлетворяют системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dq}{dT} = \theta, \quad (4.5a)$$

$$\frac{d\theta}{dT} = -\theta^{2.14} \sum \epsilon_0^2(\kappa) (0.423\kappa\theta - 0.221\kappa^2) e^{\sigma}, \quad (4.5b)$$

с начальными условиями  $\theta|_{T=0} = 1, q|_{T=0} = 0$ .

Заметим, что величина  $A(k, t) = a(k, t) \exp\left\{ \int_0^T \beta \theta^2 dT \right\}$  пропорциональна смещению средней линии следа в  $k$ -й гармонике изгибной моды.



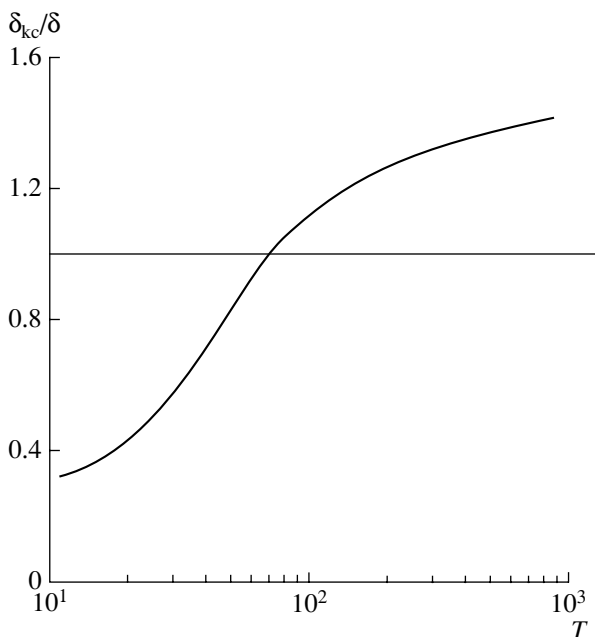


Рис. 4. Зависимость  $\delta_{KC}/\delta$  от  $T$ , характеризующая область применимости квазилинейного приближения и метода ВКБ.

Тогда  $\varepsilon_0^2(\kappa) = \frac{|a_0|^2(\kappa)}{\delta_0^2}$  имеет смысл безразмерного смещения средней линии в  $k$ -й гармонике с некоторым коэффициентом порядка единицы.

Система (4.5) интегрировалась численно методом Рунге–Кутты. Функция  $\varepsilon_0^2(\kappa)$  полагалась постоянной. Результаты расчетов сопоставлялись с данными измерений [11] и [12] и с данными наших измерений, описанными в разделе 6. Типичные зависимости  $\theta(T)$  при различных  $\varepsilon_0^2$  представлены на рис. 3а. Видно, эти зависимости качественно имеют ту же форму, что и кривые  $U_0(t)$ , полученные в наших экспериментах и экспериментах [10–12]. Заметим, что на интересующем нас интервале времени  $T < 20$  (см. ниже в пункте 4.4) зависимость  $\theta(T)$  не является автомоделной. В то же время, из рис. 3б видно, что кривые  $\theta(T - T_0)\theta_0$ , рассчитанные при различных  $\varepsilon_0^2$ , практически совпадают при определенном выборе  $\theta_0$  и  $T_0$ . Исходя из этого, мы выбрали определенное достаточно малое значение  $\varepsilon_0^2 = 0.0002$ , а подгоночные параметры  $\theta_0$  и  $T_0$  подбирали из условия наилучшего соответствия теории и эксперимента.

Через функцию  $\theta$  можно выразить другие интегральные параметры следа, измеряемые в различных экспериментах. Проще всего выражается полуширина следа:

$$\frac{\delta(t)}{\delta_0} = \frac{1}{\theta}. \quad (4.6)$$

Более сложные выражения получаются для средних кинетической энергии, энтропии и скорости диссипации кинетической энергии, измеренных в [10, 11].

**4.2. Средняя кинетическая энергия.** В работах [10, 11] средней кинетической энергией называется величина

$$E = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left( \frac{U^2}{2} + \frac{\overline{u_1^2}}{2} + \frac{\overline{v_1^2}}{2} \right) dy, \quad (4.7)$$

где  $L$  пропорционально  $\delta(t)$  и равно расстоянию, на котором значение дефекта средней скорости убывает в 5 раз. Эту величину можно вычислить на основе анализа энергии среднего течения и пульсаций. Для этого запишем в общем виде уравнения для среднего импульса и его волновых возмущений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_1 v_1} = \frac{\partial}{\partial y} K_T \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + U \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial y} K_T \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} K_T \frac{\partial u_1}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + U \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} K_T \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} K_T \frac{\partial v_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.9b)$$

Умножим (4.8) на  $U$ , (4.9a) – на  $u_1$ , (4.9b) – на  $v_1$ . После осреднения по  $x$  и  $y$  легко видеть, что

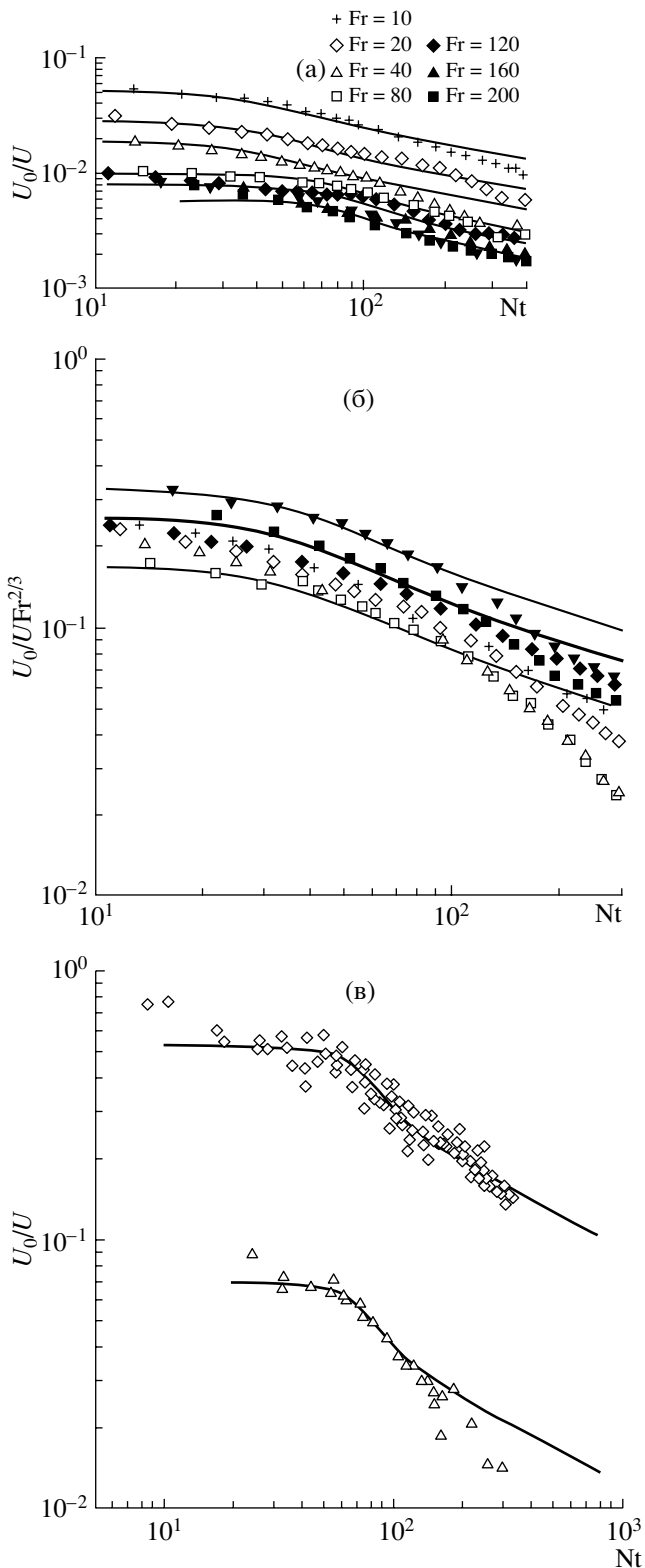
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{U^2}{2} + \frac{\overline{u_1^2}}{2} + \frac{\overline{v_1^2}}{2} \right) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} K_T \left( \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1 \partial v_1}{\partial y \partial x} \right) dy. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в отсутствии диссипации полная энергия

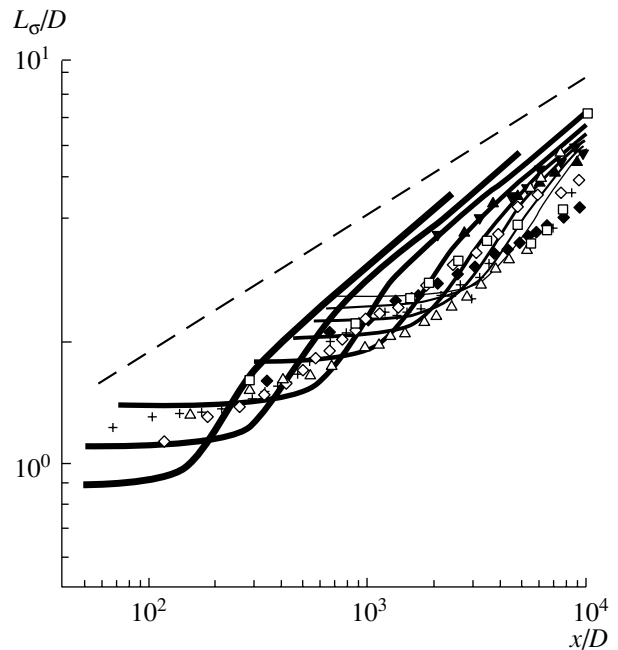
$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{U^2}{2} + \frac{\overline{u_1^2}}{2} + \frac{\overline{v_1^2}}{2} \right) dy$$

сохраняется, а при большом числе Рейнольдса – меняется слабо. Отсюда следует, что величина  $E = E_0/L$  должна изменяться пропорционально  $\theta$ .

Получим выражение для величины  $E$  непосредственно из формулы (4.7). Когда используется приближенная формула (3.11) для комплексной амплитуды функции тока,  $v_1 \ll u_1$ . Исходя из этого, при



**Рис. 5.** Зависимость максимума дефекта скорости от времени. Символы – экспериментальные точки из [11] и [12]. Кривые – расчет на основании решения системы (4.5а), (4.5б): а – данные из [11], нормировка на скорость буксировки тела, б – данные из [11], нормировка с учетом числа Фруда. Соответствие символов и чисел Fr – на рисунке. в – данные из [12],  $\diamond$  – Fr = 6,  $\triangle$  – Fr = 0.4.



**Рис. 6.** Зависимость ширины следа от расстояния до тела. Пунктирная линия –  $x^{1/3}$ . Символы – экспериментальные точки из [11]. Соответствие символов и чисел Fr такое же, как на рис. 5а, 5б. Линиям различной толщины соответствуют теоретические зависимости, рассчитанные по формуле (5.2) при разных числах Fr. Возрастают числа Fr = {10, 20, 40, 80, 120, 160, 200, 240} соответствуют линии с уменьшающейся толщиной.

оценках  $E$  будем в (4.7) учитывать только  $\overline{u_1^2}$ . Тогда, принимая во внимание, что  $L$  пропорционально  $\delta$ , имеем

$$E = E_0 \theta^2 \left( 1 + \theta^{1.14} \sum_{\kappa} \xi_0^2(\kappa) e^{\sigma} \right). \quad (4.10)$$

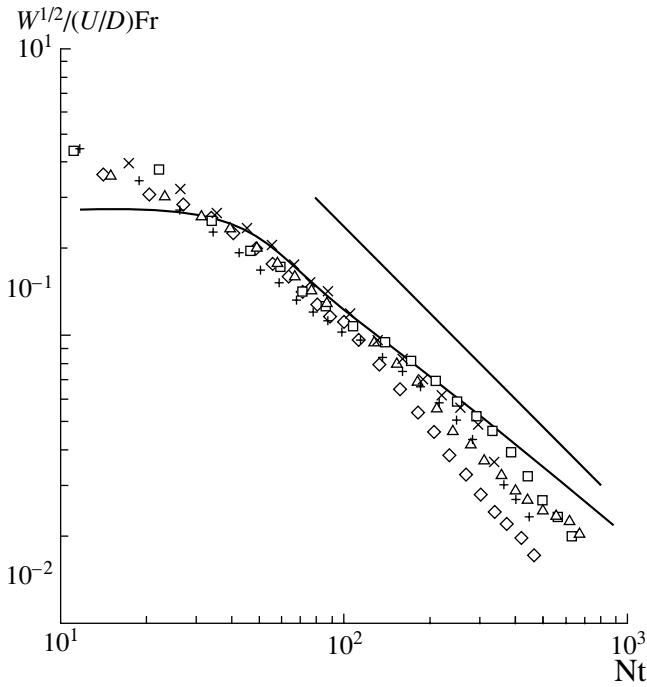
**4.3. Энтрофия и скорость диссипации кинетической энергии.** В [10, 11] измерялась величина, которая была названа средней энтрофией

$$W = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dy.$$

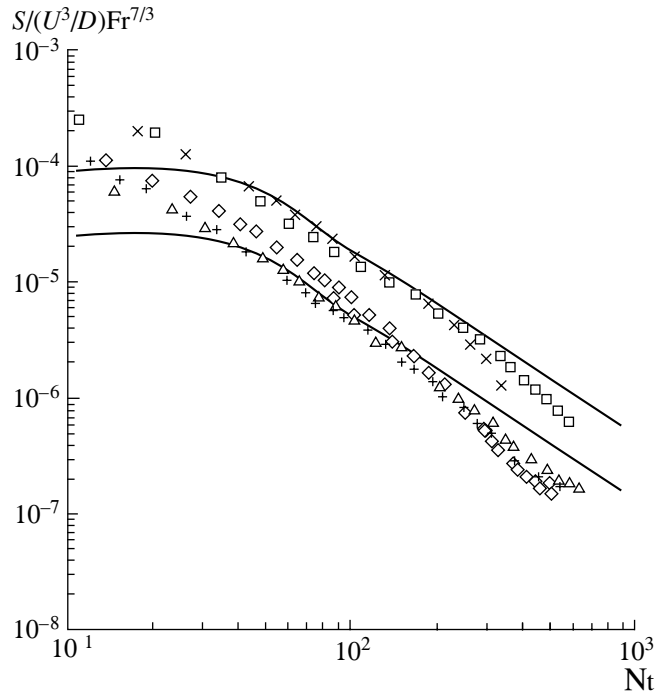
Пренебрегая при оценке третьим слагаемым в скобках, можно получить

$$W \sim \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \overline{\left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2} \right) dy.$$

Используя выражение (3.11) для функции тока и считая функцию  $U(y)$  гауссовой в безразмерных



**Рис. 7.** Зависимость средней энтропии от времени. Символы – экспериментальные точки из [11]. Символам {+,  $\diamond$ ,  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\times$ } соответствуют числа  $Fr = \{20, 40, 80, 160, 240\}$ . Кривая – расчет по формуле (4.10). Прямая –  $t^{-1}$ .



**Рис. 8** Зависимость средней диссипации кинетической энергии от времени. Символы – экспериментальные точки из [11]. Соответствие символов и чисел  $Fr$  такое же, как на Рис. 7. Кривая – расчет по формуле (4.10).

переменных, получим

$$W = W_0 \theta^4 \left( 1 + 3\theta^{1.14} \sum_{\kappa} \varepsilon_0^2(\kappa) e^{\sigma} \right). \quad (4.11)$$

Скорость диссипации кинетической энергии  $S$  с точностью до численного коэффициента совпадает с  $W$ .

**4.4. Пределы применимости квазилинейного приближения и приближения ВКБ.** Впервые квазилинейное приближение было использовано в физике плазмы при изучении взаимодействия электронов плазмы с пакетом ленгмюровских волн (см. ссылки в [22]). В такой задаче это приближение применимо, если ширина области захвата частиц волновым полем волн мала по сравнению с шириной спектра волн. Это же условие означает медленность изменения средних полей по сравнению с волновыми [22], что обеспечивает применимость приближения ВКБ. В соответствии с плазменно-гидродинамической аналогией [26, 27], в гидродинамике аналогом ширины области захвата является ширина нелинейного критического слоя (КС). При этом ширине спектра волн по фазовым скоростям соответствует разброс положений КС. Оценим сначала ширину КС:  $\delta_{КС} = (\psi_1/U_z)^{1/2}$ , где  $\psi_1$  – характерное значение

возмущения функции тока. Применяя выражение (3.13), получим, что

$$\delta_{КС} \sim \left( \delta \left( \sum_k |A(k, t)|^2 \right)^{1/2} \right)^{1/2}.$$

Разброс положений КС имеет порядок  $\delta$ , т.е.

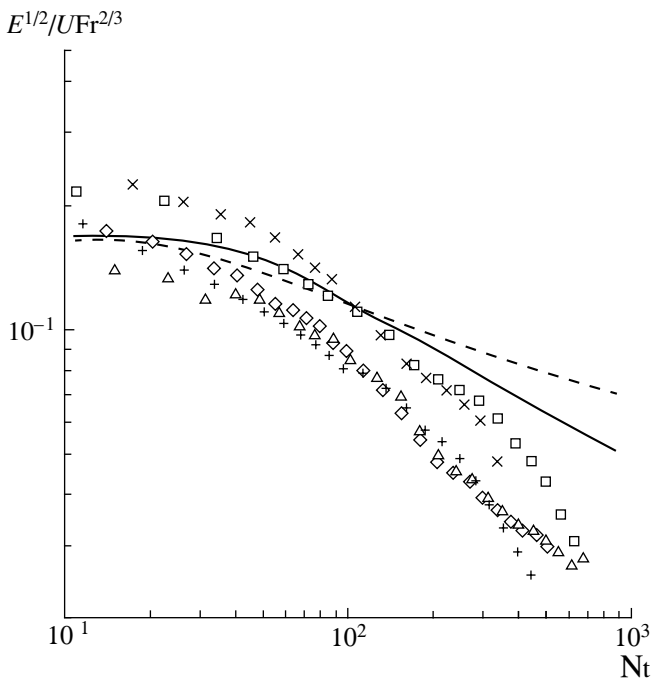
$$\frac{\delta_{КС}}{\delta} \sim \left( \frac{\sum_k |A(k, t)|^2}{\delta^2} \right)^{1/4}.$$

Переходя к безразмерным переменным, имеем

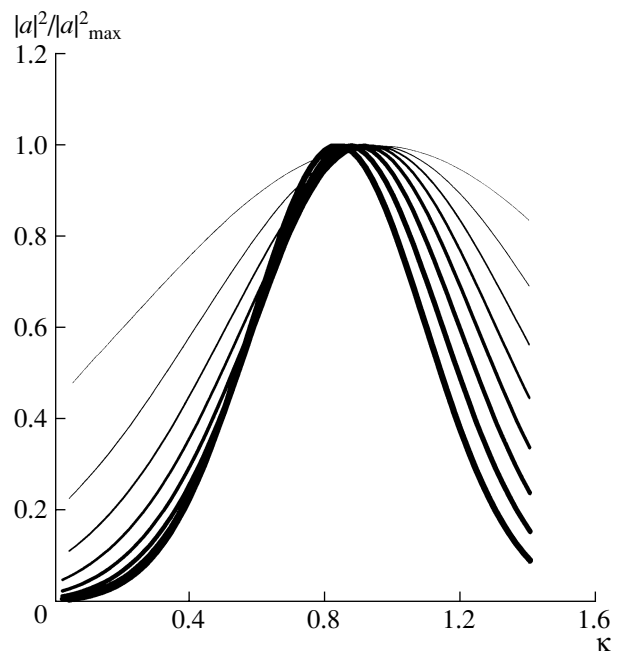
$$\frac{\delta_{КС}}{\delta} \sim \left( \theta^{1.14} \sum_{\kappa} \varepsilon_0^2(\kappa) e^{\sigma} \right)^{1/4}$$

Зависимость  $\frac{\delta_{КС}}{\delta}$  от  $T$  представлена на рис.4. Видно, что при  $T > 20 \frac{\delta_{КС}}{\delta}$ , т. е. квазилинейное при-

ближение и приближение ВКБ формально неприменимы. Однако, как показывает проведенное ниже сравнение с экспериментом, на таких временах данная модель дает зависимости средней скорости и



**Рис. 9.** Зависимость средней энергии от времени. Сплошная кривая – расчет по формуле (4.10), пунктирная – пропорциональна  $\theta^{1/2}$ . Символы – эксперименты из [11]. Соответствие символов и чисел Fr такое же, как на рис. 7.



**Рис. 10.** Спектры  $A(k, t)$ , нормированные на их максимальные значения в разные моменты времени. Самой тонкой линии соответствует время  $T = 0.02$ , самой толстой –  $T = 0.09$ . Время увеличивается с шагом 0.01 при утолщении линии.

ширины следа, удовлетворительно согласующиеся с экспериментом. Строго говоря, для оценки применимости квазилинейного приближения требуется численное решение задачи об эволюции следа.

### 5. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИ С ИМЕЮЩИМИСЯ ДАННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В работах [10–12] представлены зависимости параметров следа от безразмерного времени  $Nt$ , а в настоящей работе используется другая нормировка времени  $T = U_0 t / \delta_0$ . Поскольку параметры  $U_0$  и  $\delta_0$  в [10–12] не приводятся, то предполагалось,

$$Nt = \alpha(T - T_0), \quad (5.1)$$

и константы  $\alpha$  и  $T_0$  подбирались из условия наилучшего соответствия экспериментальным данным. Оказалось, что при  $\epsilon_0^2 = 0.0002$   $\alpha = 4.5$ ,  $T_0 = 4$  при  $Fr = 10–40$  и  $\alpha = 7$ ,  $T_0 = 0$  при  $Fr = 80–240$ .

В то же время, как показывают оценки, приведенные в [18], начало двумерной стадии эволюции следа соответствует  $2U_0(x_0)/N\delta_z(x_0) \sim 1$ , т. е. когда градиентному числу Ричардсона порядка 1 (см раздел 2). Такое отличие параметров качественно можно объяснить анизотропией следа на этой стадии, тогда отношение горизонтального масштаба следа к вертикальному  $\delta_0/\delta_z > 1$ . Увели-

чение  $\alpha$  с ростом Fr кажется правдоподобным, поскольку при больших Fr происходит более эффективное перемешивание, и можно ожидать более сильного коллапса следа.

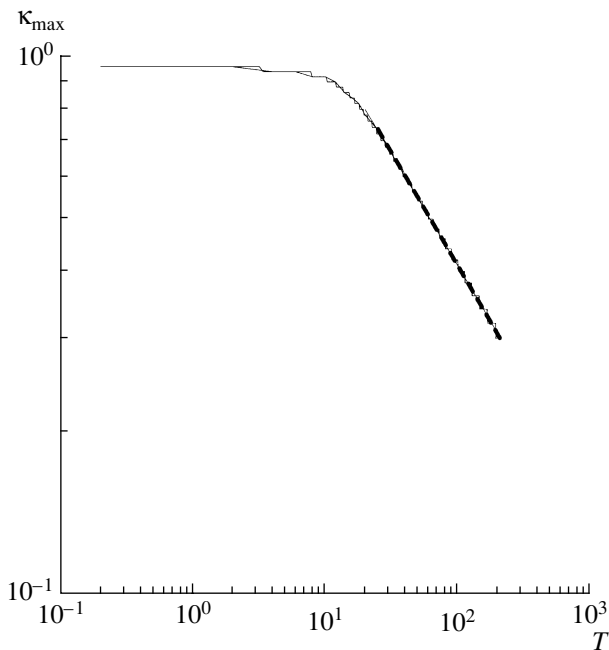
Чтобы исключить произвол с выбором  $\alpha$  была проведена дополнительная серия экспериментов, описанная в разделе 6, где измерялись величины  $U_0$  и  $\delta_0$ .

На рис. 5а, 5б представлены зависимости  $\bar{\theta}(T)$  и экспериментальные точки, взятые из [11], на рис.5в – из [12]. Константа  $\bar{\theta}$  также подбиралась из условия согласования теории и эксперимента. Из рисунков видно, что расчеты в рамках модели хорошо согласуются с данными эксперимента даже за границей формальной применимости модели.

На рис. 6а представлена зависимость нормированной ширины следа  $\delta/D$  от  $x/D$ , взятая из [11]. Рассчитываемая в рамках модели величина  $\theta = \delta_0/\delta(t)$ . С учетом (5.1) легко видеть, что  $x/D = \alpha Fr (T - T_0)/2$ . Принимая во внимание выражение (1.2а) для  $\delta_0/D$ , легко получить, что

$$\frac{\delta(x)}{D} = \frac{C_2(Fr)^{1/3}}{\theta\left(\frac{2}{\alpha Fr}x/D + T_0\right)}. \quad (5.2)$$

Зависимости, определяемые формулой (5.2), представлены на рис.6. Коэффициент  $C_2 \approx 1.1$  выбирался

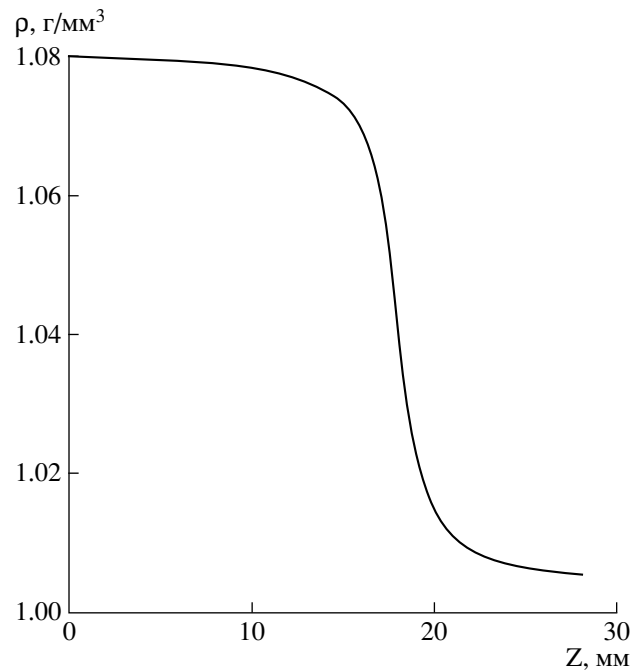


**Рис. 11.** Зависимость от времени волнового числа, соответствующего максимуму в спектре  $|A(\kappa, t)|^2$ . Штриховая кривая  $-T^{-0.43}$ .

из условия соответствия экспериментальным данным. Видно хорошее соответствие модели и данных эксперимента. На том же рисунке показана линия  $(x/D)^{1/3}$ . Видно, что эта кривая близка как к экспериментальным точкам, так и к результатам модели.

Зависимости нормированной энтропии  $W$  и скорости диссипации кинетической энергии  $S$  от времени показаны на рис. 7 и 8, где представлены как экспериментальные точки из [11], так и результаты расчетов по формуле (4.11). Здесь также результаты модели находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом.

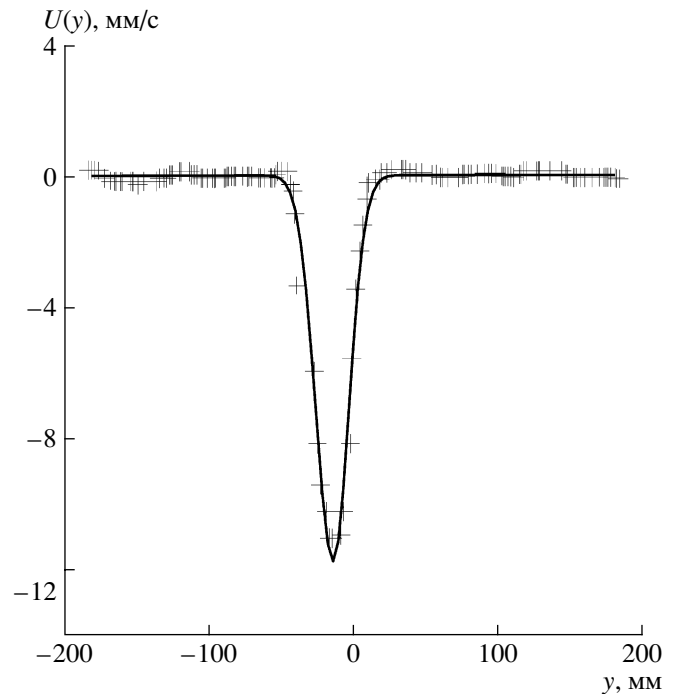
При определении средней кинетической энергии согласие теории и эксперимента хуже (рис. 9). Здесь на больших временах экспериментально измеренная средняя кинетическая энергия убывает существенно быстрее, чем предсказывает модель. Следует, однако, заметить, что расхождения имеют место вне области применимости модели (ср. рис. 4). На рис. 9 показаны две теоретические кривые для определения средней кинетической энергии. Сплошная кривая рассчитывалась по формуле (4.10), а пунктирная пропорциональна  $\theta^{1/2}$ , что следует из формулы (4.7). Видно, что на достаточно малых временах оба определения средней кинетической энергии дают близкие значения, хорошо согласующиеся с экспериментом. Причем сравнение с рис. 4 показывает, что близость двух кривых и согласие с экспериментальными данными наблюдается и за границей фор-



**Рис. 12.** Зависимость условной плотности от вертикальной координаты.

мальной применимости приближений, использованных в настоящей работе.

На рис. 10 показаны спектры  $A(\kappa, t)$  в разные моменты времени. Видно, что со временем спектр



**Рис. 13.** Символы – пример поперечного профиля средней продольной скорости в следе  $U(y)$ . Сплошная линия – гауссова функция.

пульсаций становится более узким, а положение максимума  $\kappa_m$  смещается в сторону меньших волновых чисел. На рис.11 показана зависимость  $\kappa_m$  от  $t$ . Такое поведение спектра возмущений вполне естественно. Сужение спектра обусловлено селекцией мод, а уменьшение  $\kappa_m$  со временем связано со смещением максимума инкремента волн область меньших волновых чисел за счет увеличения характерного масштаба течения  $\delta(t)$ .

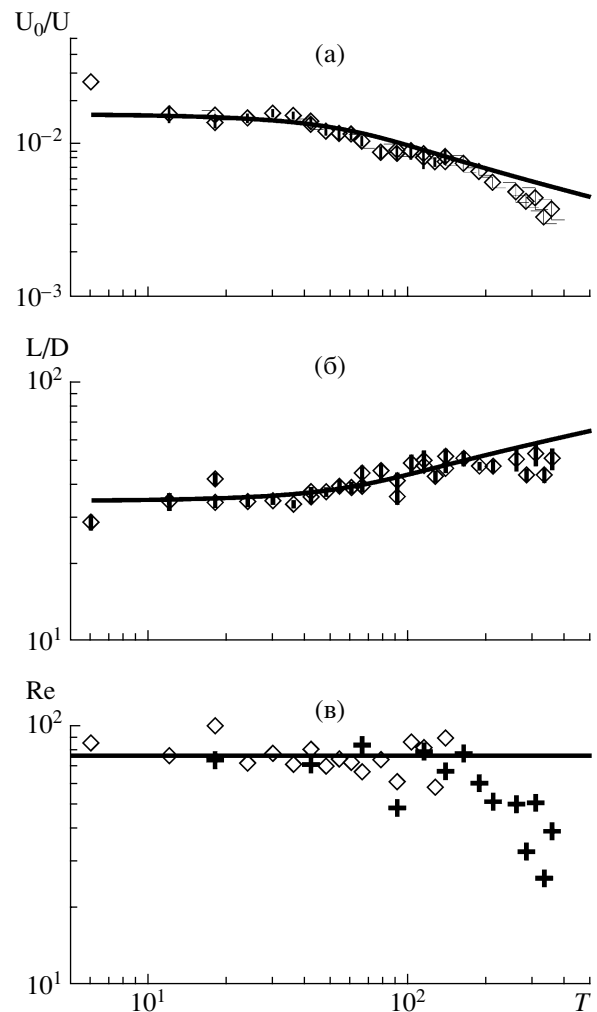
### 6. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ИЗУЧЕНИЮ СЛЕДА ЗА ТЕЛОМ, БУКСИРУЕМЫМ В ПИКНОКЛИНЕ

Как уже отмечалось, при сопоставлении с имеющимися данными лабораторных экспериментов [10–12] возникает неопределенность, связанная с тем, они представлены в виде зависимостей параметров следа от безразмерного времени  $Nt$ . В то же время, в настоящей работе получены зависимости от другого безразмерного времени  $T = U_{00}t/\delta_0$ . При этом возникает подгоночный параметр  $\alpha = N\delta_0/U_{00}$ . Чтобы избежать такой неопределенности нами был проведен эксперимент по изучению следа за телами, буксируемыми в стратифицированной жидкости. Причем использовалась стратификация пикноклинового типа.

**6.1 Описание экспериментальной установки.** Все эксперименты проводились в плексигласовом бассейне размером 120 см в длину и 50 см в ширину. Бассейн заполнялся водой с солевой стратификацией, имеющий резкий пикноклин. Типичный профиль условной плотности изображен на рис.12. В пикноклине производилась буксировка с постоянной скоростью на горизонте, лежащем внутри пикноклина, эллипсоида с размерами осей 0.8 и 2.3 см.

**6.2 Метод измерений скорости течения.** В качестве метода наблюдения был выбран PIV метод. Основы этого метода и его применение детально описаны в [10, 16]. В воду были добавлены частицы из полистирола с характерным размером порядка 1 мм, окрашенные в черный цвет для создания контраста с белым дном. Плотность полистирола ( $\rho \approx 1.07 \text{ г/см}^3$ ) была подобрана так, чтобы все частицы находились на середине пикноклина и разброс их вертикальных координат не превышал поперечных размеров эллипсоида. Движение частиц снималось на видеокамеру Sony DCR-TRV17E, затем переписывалось на компьютер и обрабатывалось с помощью специально разработанных программ.

**6.3 Интегральные параметры.** На рис. 13 показан пример измеренной зависимости скорости, усредненной по продольной координате  $x$ , от поперечной координаты  $y$ . Из рисунка видно, что она хорошо аппроксимируется гауссовой функцией. На рис. 14а, 14б показаны предварительные дан-



**Рис. 14.** Зависимость интегральных параметров следа от безразмерного времени  $T = U_{00}t/\delta_0$  а – безразмерная скорость  $U_0(T)/U_0$ ; б – безразмерная ширина  $\delta(T)/D$ ; в – число Рейнольдса  $Re_w = U_0(T)\delta(T)/\nu$ .

ные измерения: зависимости скорости на оси и полуширины от безразмерного времени  $T = U_{00}t/\delta_0$ . Начальные значения скорости на оси  $U_{00}$  и полуширины  $\delta_0$  выбирались равными соответственно 8 мм/с и 13.4 мм, которые соответствовали точке на графике, отмеченной символом  $\times$ , что означает определенный выбор начала отсчета времени. В этом случае свободным параметром при решении системы (4.5а), (4.5б) является  $\epsilon_0^2(k)$  – начальный спектр возмущений. При построении теоретической кривой выбиралось  $\epsilon_0^2 = 0.002$ . Также на рис. 14в показана зависимость  $\frac{\delta(T)U_0(T)}{\nu} = Re_w(T)$ . Видно, что в том интервале времен, где  $Re_w(T) = \text{const}$  расчет по предлагаемой в настоящей работе модели хорошо согласуется с данными измерений. На больших временах  $LU$  не сохраняется, по-видимому, за

счет вязкой диффузии завихренности в вертикальном направлении. Тогда модель становится неприемима.

Итак, в рамках настоящего эксперимента нам удалось исключить произвол, связанный с масштабированием времени. В то же время, остается произвол, связанный с выбором начала отсчета времени (или спектра возмущений в момент времени, выбранный за начальный).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена упрощенная модель эволюции дальнего следа в стратифицированной жидкости. При этом след рассматривается как квазистационарное струйное течение, на котором развиваются возмущения, нарастающие за счет гидродинамической неустойчивости. Это сопровождается передачей импульса этим возмущениям от среднего течения, в результате чего происходит уменьшение скорости на оси следа и увеличение его ширины.

Этот процесс описывается в квазилинейном приближении, которое используется и за пределами его формальной применимости. Как показывают оценки, квазилинейное приближение дает хорошее описание полей скорости, наблюдаемых в эксперименте до тех пор, пока характерный масштаб нелинейного критического слоя, определяемый по всему спектру возмущений, меньше или порядка характерного поперечного размера следа. Можно ожидать, что учет вертикального переноса импульса, который приведет к более быстрому убыванию амплитуды возмущений, даст возможность применять квазилинейное приближение на больших временах.

В рамках модели рассматривается развитие возмущений наиболее неустойчивой “изгибной” моды. При этом используется простое приближенное выражение для возмущений функции тока (3.6). Получаемый при этом профиль волнового потока импульса (3.7) находится в хорошем согласии с данными измерений [17]. При этом показано, что средняя скорость в следе удовлетворяет диффузионному уравнению с коэффициентом диффузии, зависящим от времени. Эта временная зависимость определяется нарастанием во времени амплитуды возмущений за счет гидродинамической неустойчивости и зависит от интегральных характеристик течения в следе, которые являются функциями только времени. Решением этого уравнения является функция Гаусса, которая хорошо описывает форму профиля скорости, наблюдаемую в эксперименте. В то же время, следует заметить, что в численных экспериментах (например, в [19]), в которых обеспечивается более высокая точность, наблюдаются отклонения профиля струи от гауссовой функции. Подобные

отклонения можно объяснить в рамках простой квазилинейной модели, если принять во внимание, что в действительности возмущения функции тока в “изгибной” моде описываются более сложной формулой, чем (3.6). Кроме того, на форму профиля скорости могут оказывать влияния колебания другой “варикозной” моды.

С учетом зависимости коэффициента диффузии от времени найдены параметры следа как функции времени. Как показывает сравнение с данными эксперимента, приведенными в [11, 12], а также с результатами экспериментов, описанных в настоящей работе, при  $Nt < 150$  наблюдается хорошее соответствие выводов модели и экспериментов. Отличия возникают на достаточно больших временах. Это можно объяснить ограничениями модели, в которой не учитывается вертикальный перенос импульса. На не слишком больших временах это допущение оправдано, т.е. можно считать, что возмущения на различных горизонтах развиваются независимо. Однако со временем возрастает вертикальный сдвиг скорости, что, в свою очередь, должно приводить к увеличению вертикального переноса импульса и более быстрому уменьшению скорости в центре следа. Кроме того, как уже отмечалось, можно ожидать, что учет вертикального переноса импульса позволит объяснить более быстрое убывание возмущений скорости, наблюдаемое в эксперименте, по сравнению с результатами модели.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 01–05–64439 и 03–05–06066) и гранта Президента РФ (код проекта 00–05–99399).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lin J.-T., Pao Y.-H. Wakes in stratified fluids // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1979. V. 11. P. 317–338.
2. Boyer D.L., Srdic-Mitrovic A. Laboratory studies of continuously stratified flows past obstacles // *Environmental Stratified Flows* / Ed. By R. Grimshaw. Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 191–222.
3. Syssoeva E.Y., Chashechkin Y.D. Vortex systems in the stratified wake of a sphere // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Zhidk. Gaza.* 1991. V. 4. P. 82–90.
4. Chomaz J.M., Bonneton P., Hopfinger E.J. The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 1–21.
5. Lin Q., Lindberg W. R., Boyer D. L., Fernando H. J. S. Stratified flow past a sphere // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 240. P. 315–354.
6. Bonneton P., Chomaz J.M., Hopfinger E.J. Internal waves produced by the turbulent wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 23–40.
7. Lin Q., Boyer D.L., Fernando H.J. S. Internal waves generated by the turbulent wake of a sphere // *Exp. Fluids* 1993. V. 15. P. 147–154.
8. Hopfinger E.J., Flor J.B., Chomaz J.M., Bonneton P. Internal waves generated by a moving sphere and its wake

- in a stratified fluid // *Exp. Fluids* 1991. V. 11. P. 255–261.
9. *Robey H.F.* The generation of internal waves by a towed sphere and its wake in a thermocline // *Phys. Fluids*. 1997. V. 9. № 11. P. 3353–3367.
  10. *Spedding G.R., Browand F.K., Fincham A.M.* Turbulence, similarity scaling and vortex geometry in the wake of a towed sphere in a stably stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 314. P. 53–103.
  11. *Spedding G.R.* The evolution of initially-turbulent bluff-body wakes at high internal Froude number // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 337. P. 283–301.
  12. *Bonnier M., Eiff O.* Experimental investigation of the collapse of a turbulent wake in a stably stratified fluid // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. № 2. P. 791–801.
  13. *Riley J.J., Lelong M.-P.* Fluid motions in the presence of strong stable stratification // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. P. 613–657.
  14. *Lilly D.K.* Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere // *J. Atmos.Sci.* 1983. V. 40. P. 749–761.
  15. *Embid P.F., Majda A.J.* Low froude number limiting dynamics for stably stratified flows with small or finite Rossby numbers // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1998. V. 87. P. 1–50.
  16. *Fincham A.M., Spedding G.R.* Low-cost, high-resolution DPIV for turbulent flows // *Exps.Fluids*. 1997. V. 23. P. 449–462.
  17. *Spedding G.R.* Anisotropy in turbulence profiles of stratified wakes // *Phys. Fluids*. 2001. V. 13. № 8. P. 2361–2372.
  18. *Spedding G.R.* Vertical structure in stratified wakes with high initial Froude number // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 454. P. 71–112.
  19. *Gourlay M.J., Arendt S.C., Fritts D.C., Werne J.* Numerical modeling of initially turbulent wakes with net momentum // *Phys. Fluids*. 2001. V. 13. № 8. P. 2361–2372.
  20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
  21. *Miles J.W.* On the stability of heterogeneous shear flow // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. Pt. 4. P.496–509. Howard L.N. Note to a paper of John Miles // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. Pt. 4. P. 509–514.
  22. *Галеев А.А., Сагдеев Р.З.* Нелинейная теория плазмы // Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1973. Вып. 7. С. 3-145.
  23. *Реутов В.П., Троицкая Ю.И.* О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1995. Т. 31. № 5. С. 825–834.
  24. *Yu.I.Troitskaya* Viscous diffusion nonlinear critical layer in a stratified shear flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 233. P. 25–48.
  25. *Churilov S.M., Shukhman I.G.* Nonlinear stability of a stratified shear flow: a viscous critical layer // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 180. P. 1–20.
  26. *Реутов В.П.* Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн // *Изв. РАН СССР. Физика атмосферы и океана* // 1980. Т. 16. № 12. С. 1266–1275.
  27. *Андронов А.А., Фабрикант А.Л.* Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // В кн. *Нелинейные волны* / Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 68–104.